

II.

ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

II. А. ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

1. Линейни уравнения

- **Определение:** Уравнение от вида $ax + b = 0$, където a и b са реални числа.
- **Решение:** Стойността на x , която удовлетворява уравнението.
- **Решаване:** Търсене с еквивалентни преобразувания на решенията на уравнението.

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad 0x = 0 \text{ всяко } x \text{ е решение}$$

$$0x = 3 \text{ няма решение}$$

- **Решаване на уравнение от вида:**

$$(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \text{ или } cx + d = 0$$

До такъв вид уравнения се стига, след като се използват методите за разлагане на многочлени на множители.

Задачи:**а) Проверете дали са решения на уравнението числата:**

1. $8(3x-2)-13x=39$ $x=5$

2. $\frac{5-x}{8}=\frac{18-5x}{12}$ $x=3$

3. $x^2-(a+2)x+5a-1=0$ $a=?$ ако $x=-1$ е решение

б) Решете уравненията:

1. $(13x-4)(13x+4)-(13x-1)^2-(5x+3)=0$ отг. $\frac{8}{7}$

2. $3x-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x(4-x)$ отг. няма решение

3. $\frac{1}{3}\left[x-\frac{2}{7}\left(4x-\frac{1-x}{4}\right)+7\right]=2$ отг. 5

4. $(2x-3)(3x-1)+(5-6x)(x+4)=23$ отг. 0

5. $\frac{x-1}{3}+\frac{3x+1}{2}=2x+\frac{1-x}{6}$ отг. всяко x

6. $(-x-3)^2-\frac{5x+2x^2}{2}=9+3,5x$ отг. всяко x

7. $\frac{x}{3}-\frac{x+3}{4}=x-\frac{1}{3}\left(1-\frac{3-24x}{8}\right)$ отг. 6,5

8. $2x-\frac{x-6}{-3}-2\frac{1}{3}x=-2$ отг. всяко x

$$9. \quad \frac{0,2x}{0,1} - \frac{0,1x - 0,03}{0,03} - \frac{0,4x - 0,5}{-0,4} = 1 \quad \text{отг. } -3,75$$

$$10. \quad 9x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (3x - 2)(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = -\frac{2}{3} \text{ или } x_{1,2} = \pm \frac{2}{3}$$

$$11. \quad x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 1$$

$$12. \quad x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 1$$

$$13. \quad (x + 3)^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 + 7)(x + 3 - 7) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -10 \quad x_2 = 4$$

$$14. \quad (x + 3)^2 - (6x - 65)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 3 + 6x - 65)(x + 3 - 6x + 65) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{62}{7} \quad x_2 = \frac{68}{5}$$

$$15. \quad 2x - \frac{2x - \frac{4 - 3x}{5}}{15} = \frac{7x - \frac{x - 3}{2}}{5} - x \quad \text{отг. } \frac{37}{249}$$

$$16. \quad 3 \left\{ x - \frac{3x - 1}{4} - \left[1 - 2 \left(x - \frac{3 + x}{5} \right) \right] \right\} = 5x - 2 \quad \text{отг. } 7$$

2. Параметрични линейни уравнения

• **Определение** – Линейно уравнение, в което освен неизвестното се съдържат и букви, които могат да приемат различни стойности от някакво множество, се нарича линейно параметрично уравнение.

• **Решете уравненията:**

$$1. \quad 2x = a - 3 \quad \text{ако} \quad a = 1, 2, 3, 4, 5$$

2.	$ax - 2 = 0$	ако	$a = 1, 2$
3.	$(a - 2)x = 0$	ако	$a = 1, 2$
4.	$(a - 2)x = 2$	ако	$a = 1, 2$
5.	$(a - 2)x = a - 2$	ако	$a = 1, 2$
6.	$2a(a - 2)x = a - 2$	ако	$a = 1, 2, 3$

За кои стойности на параметъра, следните уравнения имат едно решение, нямат решения или всяко x е решение?

1. $2ax + 1 = x + a \Leftrightarrow (2a - 1)x = a - 1$

– едно решение при $a \neq \frac{1}{2}$

– няма решение при $a = \frac{1}{2}$

– не може всяко x да е решение

2. $3ax - a = 1 - x$ както задача 1

3. $a(ax + 1) = 3(3x + 1) \Leftrightarrow (a^2 - 9)x = 3 - a \Leftrightarrow (a - 3)(a + 3)x = 3 - a$

– при $a = \pm 3$ едно решение

– при $a = -3$ няма решение

– при $a = 3$ всяко x е решение

4. $ax - a^2 = x - a \Leftrightarrow (a - 1)x = a(a - 1)$

– при $a = 1$ всяко x е решение

– при $a \neq 1$ има едно решение

5. $ax(a - 3) = a^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 3a + 2)x = a^2 - 4 \Leftrightarrow (a - 1)(a - 2)x = (a - 2)(a + 2)$$

– при $a \neq 1$ и $a \neq 2$	едно решение
– при $a = 1$	няма решение
– при $a = 2$	всяко x е решение

За кои стойности на m уравненията са равносилни?

Две уравнения са равносилни, когато имат еднакви решения или и двете нямат решение. Примери:

$$1. \quad \frac{x+m}{2} = 1-m \quad \text{и} \quad \frac{x-m}{3} = 1-2m$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$x = 2-3m \qquad \qquad \qquad x = 3-5m$$

еквивалентни са, когато $2-3m = 3-5m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

$$2. \quad \frac{x+m}{2} = 1-m \quad \text{и} \quad (-x-1)^2 - 1 = x^2$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$x = 2-3m \quad x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 \Rightarrow x = 0$$

еквивалентни са, когато $2-3m = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

3. Дадено е уравнението $5(ax-3) = 4ax-7$.

а) При $a = ?$, уравнението няма решение.
 $ax = 8$ при $a = 0$, няма решение.

б) При $a = ?$, $x = \frac{4}{5}$ е решение. $a \frac{4}{5} = 8 \Rightarrow a = 10$

в) За кои цели числа a корените са естествени числа?

при $a \neq 0$, $x = \frac{8}{a}$ и x е естествено число, когато $a = 1, 2, 4, 8$.

г) При $a = ?$, корените са естествени числа.

Когато $a = \frac{8}{x}$, където x е естествено число.

3. Модулни линейни уравнения (с абсолютна стойност)

- **Определение** – Уравнение, в което неизвестното е и под знака на модула, се нарича модулно.

За да се решат, трябва да се премахнат модулите, като се използва определението за модули $|x| = \begin{cases} x & \text{ако } x \geq 0 \\ -x & \text{ако } x \leq 0 \end{cases}$

- **Решете уравненията:**

$$1. \quad |x-2|=3 \Leftrightarrow x-2=\pm 3 \Rightarrow x_1=5 \quad x_2=-1$$

$$2. \quad |x-2|=0 \Rightarrow x=2$$

$$3. \quad |x-2|=-3 \text{ няма решение}$$

$$4. \quad |x-2|=|2-x| \text{ всяко } x \text{ е решение}$$

$$5. \quad \left| \frac{8x-9}{9} + \frac{5x-12}{3} \right| = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{23} \quad x_2 = \frac{81}{23}$$

$$6. \quad |x|+2|x|+3|x|=8-5|x| \Leftrightarrow 11|x|=8 \Leftrightarrow |x|=\frac{8}{11} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{8}{11}$$

$$7. \quad 3|x-5|=2-|5-x| \text{ но } |x-5|=|5-x| \Rightarrow 4|x-5|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-5|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x-5=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=\frac{11}{2} \quad x_2=\frac{9}{2}$$

$$8. \quad |5-2|x||=5 \Leftrightarrow 5-2|x|=5 \text{ или } 5-2|x|=-5 \Rightarrow |x|=0 \text{ или}$$

$$|x|=5 \Rightarrow x_1=0 \text{ и } x_{2,3}=\pm 5$$

$$9. \quad |2x-3|+3x-1=0 \text{ ако } x < \frac{3}{2}$$